

2017-2018 Bahar Yarıyılı
Balıkesir Üniversitesi
Endüstri Mühendisliği Bölümü

EMM3208

Optimizasyon Teknikleri

(GAMS Modelleme Örnekleri ve Çalışma Soruları)

6

Yrd. Doç. Dr. İbrahim Küçükkoç
<http://ikucukkoc.baun.edu.tr>
ikucukkoc@balikesir.edu.tr

Güncellendi: 14.03.2018

Petrol Karışım Problemi

Sunco, oktan dereceleri ve sülfür oranları farklı üç tip ham petrolün (H1, H2, H3) karıştırılması ile üç tip benzin (B1, B2, B3) üretmektedir. Benzinlerin oktan dereceleri ve sülfür oranları belli standartları sağlamalıdır:

- B1 için ortalama oktan derecesi en az 10, sülfür oranı en fazla %2 olmalıdır
- B2 için ortalama oktan derecesi en az 8, sülfür oranı en fazla %4 olmalıdır
- B3 için ortalama oktan derecesi en az 6, sülfür oranı en fazla %3 olmalıdır

Firmanın her benzin tipi için en fazla satabileceği talepler B1, B2 ve B3 için sırasıyla 3000, 2000 ve 1000 varildir. Bununla birlikte firma reklam yaparak talebini arttırabilmektedir. Herhangi bir benzinde 1 dolarlık reklam, talebi 10 varil arttırmaktadır. Hammaddelerin oktan dereceleri, sülfür oranları ve alış fiyatları ile benzinlerin satış fiyatları aşağıda verilen tablolardaki gibi ise Sunco'nun karını enbüyükleyecek çözümü bulunuz.

Ham petrol	Oktan	Sülfür (%)	Alış fiyatı (\$/varil)	Benzin	Satış fiyatı (\$/varil)
1	12	1	45	1	70
2	6	3	35	2	60
3	8	5	25	3	50

Karar değişkenleri

x_{ij} : i . hammaddeden j . benzine konulan miktar (varil), $i = 1,2,3$; $j=1,2,3$.

r_j : j . benzin için yapılan reklam (\$), $j=1,2,3$.

Amaç fonksiyonu (karı enbüyüklemek)

Maks Z = Kar = gelir – maliyet

$$\text{Maks } Z = (70 \sum_i x_{i1} + 60 \sum_i x_{i2} + 50 \sum_i x_{i3}) - (45 \sum_j x_{1j} + 35 \sum_j x_{2j} + 25 \sum_j x_{3j}) - \sum_j r_j$$

Kısıtlar

Oktan derecesi

$$12x_{11} + 6x_{21} + 8x_{31} \geq 10 (x_{11} + x_{21} + x_{31})$$

benzin 1 oktan derecesi

$$12x_{12} + 6x_{22} + 8x_{32} \geq 8(x_{12} + x_{22} + x_{32})$$

benzin 2 oktan derecesi

$$12x_{13} + 6x_{23} + 8x_{33} \geq 6 (x_{13} + x_{23} + x_{33})$$

benzin 3 oktan derecesi

Sülfür oranları

$$(.01x_{11} + .03x_{21} + .05x_{31})/(x_{11} + x_{21} + x_{31}) \leq .02 \rightarrow$$

$$x_{11} + 3x_{21} + 5x_{31} \leq 2 (x_{11} + x_{21} + x_{31})$$

benzin 1 sülfür oranı

$$x_{12} + 3x_{22} + 5x_{32} \leq 4 (x_{12} + x_{22} + x_{32})$$

benzin 2 sülfür oranı

$$x_{13} + 3x_{23} + 5x_{33} \leq 2 (x_{13} + x_{23} + x_{33})$$

benzin 3 sülfür oranı

Talepler

$$\sum_i x_{ij} \leq T_j + 10r_j \quad \forall j. \quad (T_j: j. benzinin reklamsız talebi)$$

İşaret sınırlamaları

$$x_{ij}, r_j \geq 0, \forall i,j.$$

```

sets
i hammadde /1*3/
j benzin /1*3/;

parameter
demand(j) j türü benzine olan talep
/1 3000
2 2000
3 1000/;

parameter
hmoktan(i) i türü hammaddeye ait oktan derecesi
/1 12
2 6
3 8/;

parameter
hmsulfur(i) i türü hammaddenin sülfür oranı
/1 1
2 3
3 5/;

parameter
hmalis(i) i türü hammaddenin alış fiyatı
/1 45
2 35
3 25/;

parameter
bnoktan(j) j türü benzinin oktan derecesi
/1 10
2 8
3 6/;

```

```

parameter
bnsulfur(j) j türü benzinin sülfür oranı
/1 2
2 4
3 3/;

parameter
bnsatis(j) j türü benzinin satış fiyatı
/1 70
2 60
3 50/;

positive variable x(i,j);
*i. hammaddeden j. benzine konulan miktar (varil)
positive variable r(j);
*j türü benzin için yapılan reklam
variable z;
*toplam kar
scalar f /10/;
*1 dolarlık reklam, talebi 10 varil arttırır demek için kullanılan sabit

equations
kar amaç fonksiyonu
supply(j) talebin karşılanmasını sağlamak üzere kullanılan kısıt
oktan(j) oktan kısıtı
sulfur(j) sulfur kısıtı;

kar.. z=e=sum((i,j), bnsatis(j)*x(i,j))-sum((i,j), ((hmalis(i)*x(i,j)-r(j))));
supply(j).. sum((i), (x(i,j))) =l= (demand(j)+(f*r(j)));
oktan(j).. sum((i), (bnoktan(j)*x(i,j))) =l= sum((i), (hmoktan(i)*x(i,j)));
sulfur(j).. sum((i), (bnsulfur(j)*x(i,j))) =l= sum((i), (hmsulfur(i)*x(i,j)));

model ornek6 /all/;
solve ornek6 using lp maximizing z;

```

S O L V E S U M M A R Y

MODEL ornek6 OBJECTIVE z
 TYPE LP DIRECTION MAXIMIZE
 SOLVER CPLEX FROM LINE 71

**** SOLVER STATUS 1 Normal Completion
 **** MODEL STATUS 3 Unbounded
 **** OBJECTIVE VALUE 60000.0000

RESOURCE USAGE, LIMIT 0.033 1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT 3 20000000000

IBM ILOG CPLEX Jul 4, 2010 23.5.1 WIN 18414.18495 VS8 x86/MS
 Cplex 12.2.0.0, GAMS Link 34

LP status(4): unbounded or infeasible
 Presolve found the problem infeasible or unbounded.
 Rerunning with presolve turned off.

LP status(2): unbounded
 Dual infeasible or unbounded. Switching to primal to aid diagno
 LP status(2): unbounded
 Model has an unbounded ray.

---- VAR x

	LOWER	LEVEL	UPPER	MARGINAL	
1.1	.	.	+INF	.	
1.2	.	250.000	+INF	.	
1.3	.	.	+INF	5.000	NOPT
2.1	.	.	+INF	.	
2.2	.	500.000	+INF	.	
2.3	.	.	+INF	15.000	NOPT
3.1	.	.	+INF	240.000	NOPT
3.2	.	1250.000	+INF	.	
3.3	.	.	+INF	25.000	NOPT

---- VAR r

	LOWER	LEVEL	UPPER	MARGINAL	
1	.	.	+INF	3.000	NOPT
2	.	.	+INF	303.000	UNBND
3	.	.	+INF	3.000	NOPT

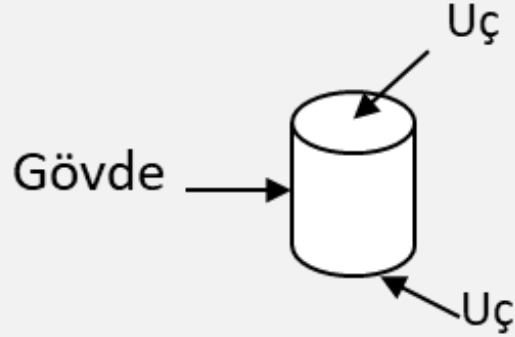
	LOWER	LEVEL	UPPER	MARGINAL
--	-------	-------	-------	----------

---- VAR z

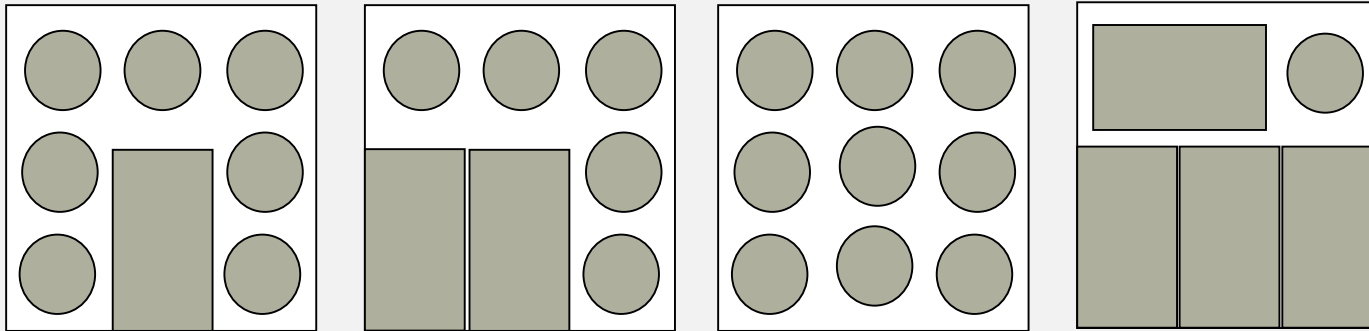
	-INF	60000.000	+INF	.
--	------	-----------	------	---

Plaka Kesim Problemi

Aşağıda gösterilen şekilde gerçekleştirilen bir teneke kutu üretimini düşününüz.



Şekilde de gösterildiği gibi her teneke kutu bir adet gövde ve iki adet uçtan oluşmaktadır. Bu parçaların teneke plakalardan kesimi aşağıda verilen dört ayrı şablona göre yapılmaktadır:



Bu şablonlar için ayrıca aşağıdaki bilgiler verilmiştir:

	Şablon			
	1	2	3	4
Gövde Sayısı	1	2	0	4
Uç sayısı	7	5	9	1
Atık miktarı	12 cm ²	10 cm ²	17 cm ²	6 cm ²
Kesim zamanı (dakika)	3	2.5	4	1.5

Bir adet kutunun satışından 12 TL kazanılmaktadır. Bunun yanı sıra her bir cm² atık 0.5 TL'ye mal olmaktadır. Bir hafta 35 saatten oluşmaktadır ve haftada en fazla 27 adet teneke plaka sağlanabilmektedir.

Hafta başında elde hiç stok bulunmamaktadır. Hafta sonunda kullanılmayan her bir gövde parçası 2 TL, her bir uç parça ise 0.5 TL maliyet oluşturmaktadır. Üretilen her kutu satılabilmektedir.

Bu şartları göz önünde bulundurarak firmanın haftalık karını maksimum yapmak için üreteceği teneke sayısını verecek bir doğrusal programlama modeli oluşturunuz.

xi: Kesilen i numaralı şablon sayısı (i: 1, 2, 3, 4)

y: Üretilen kutu sayısı ise

p: Bir kutunun satış fiyatı 12 TL ($f = 12$) olmak üzere kutuların satışından elde edilen
toplam gelir: $f*y$ 'dir

c: santimetrekare atık maliyeti ($m = 0.5$) ve

ai: i şablonunun kullanılması neticesinde bir plakadan çıkan atık miktarı olmak üzere
toplam atık maliyeti: $c \sum_{i=1}^4 a_i x_i$

hg: bir gövde parçasını elde bulundurma maliyeti (holding cost) ($hg = 2$)

hu: bir uç parçasını elde bulundurma maliyeti (holding cost) ($hu = 0.5$)

gi : i şablonundaki gövde sayısı

ui : i şablonundaki uç sayısı ise ve üretilen her kutu satılabiliyorsa

toplam elde bulundurma maliyeti:

$$hg \sum_{i=1}^4 g_i x_i + hu \sum_{i=1}^4 u_i x_i$$

Bu durumda ***amaç fonksiyonu (toplam kar):***

$$z_{maks} = fy - c \sum_{i=1}^4 a_i x_i - hg \sum_{i=1}^4 g_i x_i - hu \sum_{i=1}^4 u_i x_i$$

Problemde malzeme ve kapasite kısıtı olmak üzere iki kısıt altında optimum karı sağlayacak şekilde hangi şablonun kaç plakada kullanılması gerektiğinin bulunması istenmektedir.

k_i : i şablonunun kesim süresi (dakika) ve

th : haftalık kesim saati kapasitesi (time capacity) ($th = 35$)

1 saat 60 dakikaysa

tc : haftalık kesim dakika kapasitesi = $60 \cdot 35$

oq : haftalık temin edilebilen plaka satışı (order quantity) ($oq = 27$) olmak üzere kısıtlar;

$$\sum_{i=1}^4 k_i x_i \leq tc$$

$$\sum_{i=1}^4 x_i \leq oq$$

Problemde verilen üretim siteminin malzeme ve kapasite kısıtları haricinde iki sistem kısıtı daha bulunmaktadır. Bunlar;

- Ürünün yapısı gereği (ürün ağacına göre) 1 kutuda 1 gövde bulunmaktadır, dolayısıyla üretilen kutu sayısı kesilen şablonlardaki toplam gövde sayısından büyük olamaz.

$$y \leq \sum_{i=1}^4 g_i x_i$$

- Yine ürünün yapısı gereği (ürün ağacına göre) 1 kutuda 2 gövde bulunmaktadır, dolayısıyla üretilen kutu sayısının 2 katı kesilen şablonlardaki toplam gövde sayısından küçüktür.

$$2y \leq \sum_{i=1}^4 u_i x_i$$

Değişkene bağımlı ve değişkenden bağımsız parametreler ile sabitler yandaki şekilde tanımlanır.

```
sets i /1*4/

scalar
d bir saat 60 dakika /60/;

parameters
a(i) atik miktarı /1 12, 2 10, 3 17, 4 6/
g(i) sablonlardaki govde sayısı /1 1, 2 2, 3 0, 4 4/
u(i) sablonlardaki uc sayısı /1 7, 2 5, 3 9, 4 1/
k(i) kesim zamanı /1 3, 2 2.5, 3 4, 4 1.5/
p bir kutunun satis fiyatı /12/
c santimetrekare atik maliyeti /0.5/
hg bir govdenin elde bulundurma maliyeti /2/
hu bir ucun elde bulundurma maliyeti /0.5/
oq haflalık temin edilebilen plaka sayısı /27/
ch haftalık kesim saati kapasitesi /35/
cm haftalık kesim dakikası kapasitesi;

cm=d*ch;
```

İndisli değişkenler ve tamsayılı
değişkenler yandaki şekilde
ifade edilir.

```
sets i /1*4/
```

```
scalar
```

```
d bir saat 60 dakika /60/;
```

```
parameters
```

```
a(i) atik miktarı /1 12, 2 10, 3 17, 4 6/
```

```
g(i) sablonlardaki govde sayısı /1 1, 2 2, 3 0, 4 4/
```

```
u(i) sablonlardaki uc sayısı /1 7, 2 5, 3 9, 4 1/
```

```
k(i) kesim zamanı /1 3, 2 2.5, 3 4, 4 1.5/
```

```
p bir kutunun satış fiyatı /12/
```

```
c santimetrekare atik maliyeti /0.5/
```

```
hg bir govdenin elde bulundurma maliyeti /2/
```

```
hu bir ucun elde bulundurma maliyeti /0.5/
```

```
oq haftalık temin edilebilen plaka sayısı /27/
```

```
ch haftalık kesim saati kapasitesi /35/
```

```
cm haftalık kesim dakika kapasitesi;
```

```
cm=d*ch;
```

```
variables
```

```
y
```

```
x(i)
```

```
z;
```

```
integer variables
```

```
y
```

```
x(i);
```

Belirtilen bir kümedeki (setteki) değişkenlerin toplamı “sum” formülüyle ifade edilir ve ilgilendiğimiz değişkenleri “display x.l, y.l, z.l” komutuyla görüntüleyebiliriz.

Burada;

.l = level ya da primal değerdir.

Diğer gösterimler ise şunlardır:

.lo = alt sınır (lower bound)

.up = üst sınır (upper bound)

.m = marjinal ya da dual değer

```
integer variables
```

```
y
```

```
x(i);
```

```
equations
```

```
amac
```

```
KesimSaati
```

```
TenekePlakaSayisi
```

```
GovdeSayisi
```

```
UcSayisi;
```

```
amac..    z =e= p*y - c*sum(i,a(i)*x(i)) - hg*sum(i,g(i)*x(i)) - hu*sum(i,u(i)*x(i));
```

```
KesimSaati..    sum(i, k(i)*x(i)) =l= cm;
```

```
TenekePlakaSayisi..    sum(i, x(i)) =l= oq;
```

```
GovdeSayisi..    sum(i, g(i)*x(i))=g= y;
```

```
UcSayisi..    sum (i, u(i)*x(i)) =g= 2*y;
```

```
model ornek2/all/;
```

```
solve ornek2 using mip maximizing z;
```

```
display x.l, y.l, z.l;
```

Optimal değerler;

$x_1 = 0, x_2 = 24, x_3 = 0, x_4 = 3, y = 60, z = 409.500$

```
**** REPORT SUMMARY :      0      NONOPT
                        0 INFEASIBLE
                        0 UNBOUNDED
```

```
QGAMS Rev 141  Intel /MS Window                      11/30/10 04:39:53 Page 6
General Algebraic Modeling System
Execution
```

```
----      47 VARIABLE x.L
```

```
2 24.000,      4  3.000
```

```
----      47 VARIABLE y.L      =      60.000
          VARIABLE z.L      =      409.500
```

Sunucu Ulaştırma Problemi

Bu problemde, İstanbul ve Ankara'da bulunan iki üretim merkezinden, Sakarya, Bolu ve Eskişehir'de bulunan üç pazarın gereksinimlerine göre bilgisayar sunucusu gönderilmesi gereklidir.

	Pazarlar			Kapasite
	Sakarya	Bolu	Eskişehir	
İstanbul	150 km	250 km	400 km	350 adet
Ankara	300 km	200 km	150 km	600 adet
Talep miktarı	325 adet	300 adet	275 adet	

Her bir sunucunun ulaştırma fiyatı gönderim yapılan uzaklığa bağlı olarak km başına 90 TL olarak verilmiştir. Problemin amacı her bir üretim merkezinin kapasitelerini aşmadan her pazarın gereksinimini en düşük maliyetle karşılayacak çözümün bulunmasıdır.

Problemde her fabrika ve pazar endeks olarak tanımlanabilir.

Sets

i fabrikalar /ist, ank/
 j pazarlar /sak, bol, esk/;

Artık tüm değişkenler bu endekslere bağlı olarak tanımlanacaktır.

Parameters

$K(i)$ her fabrikanın kapasitesi /ist 350, ank 600/
 $T(j)$ her pazarın talebi /sak 325, bol 300, esk 275/;

Km başına taşıma maliyeti 90 TL olarak verilmiştir. Bu durumda sabit birim km taşıma maliyeti:

Scalar

m km başına taşıma maliyeti /90/;

u_{ij} : i fabrikasından j pazarına olan uzaklık olmak üzere çift indisli “ u_{ij} ” değişkenini tanımlamak için tablo kullanmalıyız.

Table $u(i,j)$

	sak	bol	esk
ist	150	250	400
ank	300	200	150 ;

Bu durumda birim taşıma maliyeti aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Parameter $c(i,j)$ her bir durum için taşıma maliyeti ;
 $c(i,j) = m \cdot u(i,j)$;

olur.

Değişken olarak her fabrikadan her pazara gönderilen sunucu miktarını alabiliriz.

Variables

$x(i, j)$

z ;

Positive variables x ;

Equations

maliyet

kapasite(i)

talep(j) ;

```
maliyet..      z=e=sum((i,j), x(i,j)*c(i,j));  
kapasite(i).. sum(j, x(i,j))=l= K(i);  
talep(j)..    sum(i, x(i,j))=g= T(j);
```

Son olarak modelin çözümü için aşağıda verilen komutları yazmalıyız.

```
Model ornek3 /all/ ;  
Solve ornek3 using lp minimizing z ;
```

İlgilendiğimiz değişkeni aşağıda verilen komutu kullanarak görüntüleyebiliriz.

```
Display x.l, z.l;
```

```

sets i fabrikalar /ist, ank/
j pazarlar /sak, bol, esk/

parameters
K(i) her fabrikanin kapasitesi /ist 350, ank 600/
T(j) her pazarin talebi /sak 325, bol 300, esk 275/

scalar m km basina tasima maliyeti /90/;

table u(i,j)
      sak bol esk
ist 150 250 400
ank 300 200 150;

parameter c(i,j) her bir durum icin tasima maliyeti;
c(i,j)=m*u(i,j);

variables x(i,j)
z;

positive variable
x;

equations
maliyet
kapasite(i)
talep(j);

maliyet..      z=e=sum((i,j), x(i,j)*c(i,j));
kapasite(i)..  sum(j, x(i,j))=l= K(i);
talep(j)..     sum(i, x(i,j))=g= T(j);

model ornek3/all/;

solve ornek3 using lp minimizing z;

display x.l , z.l;

```

```

LP Presolve eliminated 1 rows and 1 columns.
Reduced LP has 5 rows, 6 columns, and 12 nonzeros.
Presolve time = 0.00 sec.
Initializing dual steep norms . . . .

Iteration      Dual Objective      In Variable      Out Variable
      1      26100000.000000      x(ank.bol)      talep(bol) slack
      2      25987500.000000      x(ist.bol)      talep(sak) slack

Optimal solution found.
Objective : 25987500.000000

--- Restarting execution
--- Ornek3.gms(35) 0 Mb
--- Reading solution for model ornek3
--- Executing after solve
--- Ornek3.gms(37) 3 Mb
*** Status: Normal completion

```

General Algebraic Modeling System Execution

---- 37 VARIABLE x.L

	sak	bol	esk
ist		25.000	325.000
ank	325.000	275.000	

---- 37 VARIABLE z.L = 2.598750E+7

EXECUTION TIME = 0.000 SECONDS 2.9 Mb WIN216-141 Jan 24, 2005

USER: Centre Versailles - Grigon S021106:1507AB-WIN
I.N.R.A. DC2726
License for teaching and research at degree granting institutions

**** FILE SUMMARY

Input C:\Documents and Settings\User\Belgelerim\ITU Course Notes\OR\GAMS\Ornek3.gms
Output C:\WINDOWS\gamsdir\Ornek3.lst

“Bin Packing” Problemi

Bin packing problemi (BPP), bir çok yöneylem araştırması probleminin modellenmesi ve çözümüne temel teşkil eden bir problemidir.

Yapı olarak Knapsack problemine benzemekle birlikte, ondan farklı olarak birden fazla sırt çantası olduğu düşünülebilir. Dolayısıyla amaç ve kısıtlar farklıdır.

Amaç fonksiyonu ve kısıtlara bağlı olarak çok farklı türleri olmakla birlikte, aşağıda BPP’nin en yalın halde amaç fonksiyonu ve kısıtları verilmiştir:

Amaç fonksiyonu:

- *Tüm ürünleri/eşyaları yerleştirebilmek kaydıyla, çanta/koli/kaynak sayısını minimize etmektir.*

Karar Değişkeni:

- *Hangi ürünün hangi koliye yerleştirileceğine karar verilmesi gerekir.*

Problemin kısıtları aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

- Tüm ürünler tam olarak bir koliye atanmak zorundadır (atanmamış ürün kalamaz ve bir ürün birden fazla koliye atanamaz).
- Bir koliye atanan ürünlerin ağırlıkları toplamı, kolinin taşıyabileceği maksimum ağırlıktan fazla olamaz.
- Bir koli, ancak içine eşya atanmışsa açılabilir/kullanılabilir/çözüme dahil edilebilir.
- İşaret kısıtları (probleme bağlıdır).

Aşağıdaki kısıt isteğe bağlıdır:

- Koliler, 1 numaralı koliden başlamak üzere açılırlar.

Örnek:

Bir firma, müşterilerine havayolu ile göndereceği 20 adet ürünü, standart boyutlardaki kolilere paketlemek istemektedir. Gönderilecek ürünlere ilişkin ağırlık bilgisi aşağıdaki gibidir:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
W_i	5	7	3	5	6	2	4	4	7	4	8	2	7	1	2	5	4	6	4	3

i : ürün, W_i : i ürününün ağırlığı (kg)

Her bir kolinin taşıyabileceği maksimum ağırlık 10kg'dır.

Hazırlanacak koli sayısını minimize etmek amacıyla, hangi ürünün hangi koliye yerleştirilmesi gerektiğine karar veriniz.

Matematiksel Model (Notasyon):

i : ürün indeksi

j : koli indeksi

w_i : i ürününün ağırlığı (kg)

x_{ij} : 1, i ürünü j kolisine atanmışsa; 0 değilse

z_j : 1, j kolisi kullanılmışsa (en az bir ürün atanmışsa); 0 değilse

KP : Her bir kolinin taşıyabileceği maksimum ağırlık (kg)

Matematiksel Model (Amaç Fonksiyonu ve Kısıtlar):

$$\text{Min } OBJ = \sum_j z_j$$

$$\sum_j x_{ij} = 1 \quad \forall i$$

-> Her ürün tam olarak bir koliye atanmış olmalıdır.

$$\sum_i x_{ij} w_i \leq KP \quad \forall j$$

-> Bir koliye atanacak ürünlerin ağırlığı toplamı, kolinin taşıyabileceği maksimum ağırlığı aşamaz.

$$x_{ij} \leq z_j \quad \forall i, j$$

-> Bir koli, ancak bu koliye en az bir ürün atanmışsa açılabilir.

$$z_{(j+1)} \leq z_j \quad \forall j$$

-> Koliler, ilk koliden başlamak üzere açılırlar.

$$x_{ij}, z_j \in \{0,1\}$$

-> İşaret kısıtları

```

set
i urun /1*20/
j koli /1*20/
;

parameter
w(i) ürün ağırlıkları (kg)
/1 5
 2 7
 3 3
 4 5
 5 6
 6 2
 7 4
 8 4
 9 7
10 4
11 8
12 2
13 7
14 1
15 2
16 5
17 4
18 6
19 4
20 3
/

scalar
KP her bir kolinin taşıyabileceği maksimum ağırlık (kg) /10/
;

```

```

variable
x(i,j) i urunu j kolisine atanmışsa
z(j) j kolisi kullanılmışsa
OBJ amaç fonk
;

binary variable
x(i,j)
z(j)
;

equation
amac
atamakisit
kapasitekisit
koliacmakisit
kolisirakisit
;

amac.. OBJ=e=sum(j, z(j));
atamakisit(i).. sum(j, x(i,j)) =e= 1;
kapasitekisit(j).. sum(i, x(i,j)*w(i)) =l= KP;
koliacmakisit(i,j).. x(i,j) =l= z(j);
kolisirakisit(j).. z(j+1) =l= z(j);

model MBP /all/;
solve MBP using mip minimizing OBJ;

display x.l, kapasitekisit.l;

```

----- 66 VARIABLE x.L i urunu j kolisine atanmışsa

	1	2	3	4	5	6
5			1.000			
6				1.000		
7				1.000		
9						1.000
10				1.000		
11	1.000					
12		1.000				
13		1.000				
14		1.000				
15	1.000					
17					1.000	
18					1.000	
19			1.000			
20						1.000
+	7	8	9			
1	1.000					
2		1.000				
3		1.000				
4			1.000			
8			1.000			
16	1.000					

Toplamda 9 adet koli kullanılmıştır.

Koli	Atanan Ürünler
1	11, 15
2	12, 13, 14
3	5, 19
4	6, 7, 10
5	17, 18
6	9, 20
7	1, 16
8	2, 3
9	4, 8

----- 66 EQUATION kapasitekisit.L

1 10.000, 2 10.000, 3 10.000, 4 10.000, 5 10.000, 6 10.000
7 10.000, 8 10.000, 9 9.000

Koli	Atanan Ürünler	Ağırlık (kg)
1	11, 15	10
2	12, 13, 14	10
3	5, 19	10
4	6, 7, 10	10
5	17, 18	10
6	9, 20	10
7	1, 16	10
8	2, 3	10
9	4, 8	9

Çalışma Soruları

Matematiksel modellemesi verilen problemleri GAMS kullanarak çözünüz.

Soru 1

Bir işletme, aşağıdaki özellikleri taşıyan ürün üretmektedir:

$$\text{Yanma Noktası} \geq 2800$$

$$\text{Özgül Ağırlığı} \geq 1.00$$

$$\alpha \text{ muhtevası} \leq \% 8 \text{ hacim olarak}$$

$$\beta \text{ muhtevası} \leq \% 3 \text{ hacim olarak}$$

Ürün, litresi sırası ile 16 TL, 20 TL ve 25 TL olan A, B ve C yarı mamullerinden elde edilebilmektedir. Bu üç yarı mamulün özellikleri aşağıdaki gibidir.

	A	B	C
Yanma noktası	2800	2700	2900
Özgül ağırlığı	0.95	1.20	1.10
α muhtevası (%)	7	8	11
β muhtevası (%)	4	5	3

Üretici, yukarıdaki koşullara uygun olarak ürününü en düşük maliyetle üretmek istemektedir. Buna göre problemin doğrusal programlama modeli nasıl kurulur ve çözülür?

Matematiksel Model:

Karar Değişkenleri

x_1 = Üründeki A oranı

x_2 = Üründeki B oranı

x_3 = Üründeki C oranı

Amaç fonksiyonu

$$\text{Min } Z = 16x_1 + 20x_2 + 25x_3$$

Problemın Kısıtları

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$2800x_1 + 2700x_2 + 2900x_3 \geq 2800 \quad (\text{Yanma noktası kısıtı})$$

$$0.95x_1 + 1.20x_2 + 1.10x_3 \geq 1.00 \quad (\text{Özgöl ağırlık kısıtı})$$

$$7x_1 + 8x_2 + 11x_3 \leq 8 \quad (\alpha \text{ muhtevası kısıtı})$$

$$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 3 \quad (\beta \text{ muhtevası kısıtı})$$

Soru 2

W7ABC.gms

ABC şirketi yeni bir yer silme sıvısı üretecektir. Bu sıvının içinde A temizleyici maddesinden en az %20 en fazla %40, B temizleyici maddesinden en az %25 en fazla %50 ve C temizleyici maddesinden en az %35 en fazla %50 olacaktır. Şirket, A, B ve C maddelerini üretmek için ise 3 ayrı hammadde kullanmaktadır. Bu maddelerin içerikleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Hammadde	A maddesi	B maddesi	C maddesi
I	%60	%30	%10
II	%25	%25	%50
III	%20	%50	%30

Hammadde I, II ve III' ün kg maliyetleri sırasıyla 1.5 TL, 1.55 TL, 1.6 TL'dir. Şirket en az maliyetle talebi karşılayacak yer silme sıvısının üretimi için doğrusal programlama modeli oluşturup çözmek istemektedir.

Karar değişkenleri

Karışım probleminde, her biri ürün içinde yer alacak hammadde miktarına karşılık gelen 3 karar değişkeni tanımlanmalıdır. Bunlar;

P_i = ürünün içinde yer alacak i hammaddesi oranı

Amaç fonksiyonu

Problemin amacı kullanılan hammadde maliyetini minimize etmektir. Dolayısıyla, karar değişkenleri ile o karar değişkenine karşılık gelen maliyet değerleri çarpılıp sonra da tüm değerler toplanarak amaç fonksiyonu elde edilir.

$$\text{Min } Z = 1.5 P_1 + 1.55P_2 + 1.6P_3$$

Problemin kısıtları

Problemdeki ilk üç kısıt, ürün içinde A, B ve C maddelerinden bulunması gereken en az miktarı sağlayan kısıtlardır.

$$0.60 P_1 + 0.25P_2 + 0.20P_3 \geq 0.20$$

$$0.30 P_1 + 0.25P_2 + 0.50P_3 \geq 0.25$$

$$0.10 P_1 + 0.50P_2 + 0.30P_3 \geq 0.35$$

Problemdeki ikinci grup üç kısıt da, ürünün içinde A, B ve C maddelerinden bulunması gereken en fazla miktarı sağlayan kısıtlardır.

$$0.60 P_1 + 0.25P_2 + 0.20P_3 \leq 0.4$$

$$0.30 P_1 + 0.25P_2 + 0.50P_3 \leq 0.5$$

$$0.10 P_1 + 0.50P_2 + 0.30P_3 \leq 0.5$$

Üç hammaddeden kullanılan oranların toplamının %100 olmasını sağlayan kısıt da aşağıdaki şekilde yazılmalıdır.

$$P_1 + P_2 + P_3 = 1$$

Son olarak karar değişkenlerinin negatif olmama kısıtları da aşağıda gösterildiği gibi modele eklenmelidir.

$$P_i \geq 0$$

Amaç fonksiyonu ve kısıtlar bir araya getirilerek karışım modeli aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$\text{Min } Z = 1.5 P_1 + 1.55P_2 + 1.6P_3$$

$$0.60 P_1 + 0.25P_2 + 0.20P_3 \geq 0.20$$

$$0.30 P_1 + 0.25P_2 + 0.50P_3 \geq 0.25$$

$$0.10 P_1 + 0.50P_2 + 0.30P_3 \geq 0.35$$

$$0.60 P_1 + 0.25P_2 + 0.20P_3 \leq 0.40$$

$$0.30 P_1 + 0.25P_2 + 0.50P_3 \leq 0.50$$

$$0.10 P_1 + 0.50P_2 + 0.30P_3 \leq 0.50$$

$$P_1 + P_2 + P_3 = 1$$

$$P_i \geq 0$$

Soru 3

Bir rafineri 2 tür kurşunsuz benzin üretimi yapmaktadır. 1. tipin varil fiyatı 48\$, 2. tipin varil fiyatı ise 53\$'dır. Her iki tip benzin de Tablo 1'de verilen özellikleri karşılamak zorundadır. Karışımda kullanılan bileşenler ve özellikleri de Tablo 2'de verilmiştir. Haftalık karı maksimize etmek için iki tip benzine hangi bileşenlerden hangi miktarlarda karıştırılmalıdır? Geliştirilen matematiksel modele göre Excel Solver kullanarak çözümü bulunuz.

Tablo 1

Benzin tipi	Minimum oktan oranı	Maksimum talep (varil/hafta)	Minimum dağıtım (varil/hafta)
1. Tip Benzin	87	80.000	60.000
2. Tip Benzin	93	40.000	15.000

Tablo 2

Benzin Bileşenleri	Oktan oranı	Arz miktarı (varil)	Maliyet (\$/varil)
1	86	70.000	33
2	96	60.000	37

Karar değişkenleri

Bu problemdeki kontrol değişkenleri, benzinlere karıştırılması gereken iki bileşenin miktarlarıdır.

x_{ij} = j tip benzine karıştırılan i bileşeninin varil cinsinden haftalık miktarı

$$i = 1, 2 ; \quad j = 1, 2$$

Amaç Fonksiyonu

Benzin bileşenlerinin doğrusal olarak karıştığı kabul edilirse, 1. tip benzin miktarı $x_{11} + x_{21}$, ikinci tip benzin miktarı ise $x_{12} + x_{22}$ olarak verilir. Benzer şekilde kullanılan 1. ve 2. bileşenlerin toplam miktarları da sırasıyla $x_{11} + x_{12}$ ve $x_{21} + x_{22}$ olarak verilebilir. Amaç fonksiyonu şu şekilde formüle edilebilir:

$$Kar = \text{satış} - \text{maliyet}$$

$$Max Z = 48(x_{11} + x_{21}) + 53(x_{12} + x_{22}) - 33(x_{11} + x_{12}) - 37(x_{21} + x_{22}) \quad \text{haftalık kar}$$

$$Max Z = 15x_{11} + 20x_{12} + 11x_{21} + 16x_{22}$$

Problemin Kısıtları

Minimum oktan oranı ihtiyacını karşılamak için, iki bileşenin değişik miktarlarda karıştırılması durumunda ortaya çıkacak oktan seviyesini belirlemeliyiz. Bileşenlerin yine doğrusal olarak karıştığını kabul ediyoruz. Bileşenlerin karışımındaki oktan seviyesi ağırlıklı ortalama alınarak hesaplanabilir. Karışımındaki toplam oktanı, varil miktarına bölerek buluruz.

Böylece, 1. tip benzin için minimum oktan oranı kısıtı

$$\frac{86x_{11} + 96x_{21}}{x_{11} + x_{21}} \geq 87$$

Bu kısıt lineer değildir fakat eşitsizliğin her iki tarafını

$x_{11} + x_{21}$ ile çarparsak;

$$-x_{11} + 9x_{21} \geq 0$$

Aynı şekilde, 2. tip benzin için minimum oktan oranı kısıtı

$$\frac{86x_{12} + 96x_{22}}{x_{12} + x_{22}} \geq 93$$

Bu kısıt lineer değildir fakat eşitsizliğin her iki tarafını

$x_{12} + x_{22}$ ile çarparsak;

$$-7x_{12} + 3x_{22} \geq 0$$

Benzin tipleri için minimum ve maksimum dağıtım gereksinimi kısıtları ise şu şekilde formüle edilebilir:

$$x_{11} + x_{21} \geq 60.000 \quad (1. \text{tip benzin için minimum dağıtım miktarı})$$

$$x_{12} + x_{22} \geq 15.000 \quad (2. \text{tip benzin için minimum dağıtım miktarı})$$

$$x_{11} + x_{21} \leq 80.000 \quad (1. \text{tip benzin için maksimum talep miktarı})$$

$$x_{12} + x_{22} \leq 40.000 \quad (2. \text{tip benzin için maksimum talep miktarı})$$

Benzer şekilde, bileşenlerin arz kısıtları:

$$x_{11} + x_{12} \leq 70.000 \quad (1. \text{bileşenin arz miktarı})$$

$$x_{21} + x_{22} \leq 60.000 \quad (2. \text{bileşenin arz miktarı})$$

Negatif olmama kısıtları:

$$x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} \geq 0$$

Böylece lineer programlama modelinin tamamı aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\text{Max } Z = 15x_{11} + 20x_{12} + 11x_{21} + 16x_{22}$$

$$-x_{11} + 9x_{21} \geq 0$$

$$-7x_{12} + 3x_{22} \geq 0$$

$$x_{11} + x_{21} \geq 60.000$$

$$x_{12} + x_{22} \geq 15.000$$

$$x_{11} + x_{21} \leq 80.000$$

$$x_{12} + x_{22} \leq 40.000$$

$$x_{11} + x_{12} \leq 70.000$$

$$x_{21} + x_{22} \leq 60.000$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} \geq 0$$

Doğrusallık varsayımları altında, modelimiz karışım gereksinimlerini tam olarak sağlamaktadır. Fakat satışlardan elde edilen gelir ve maliyetler, amaç fonksiyonunda görünmemektedir.

1. ve 2. tip benzin miktarlarına sırasıyla g_1 ve g_2 dersek;

$$g_1 = x_{11} + x_{21} \text{ veya}$$

$$x_{11} + x_{21} - g_1 = 0 \text{ (1. tip benzinin varil cinsinden toplam miktarı)}$$

Aynı şekilde;

$$g_2 = x_{12} + x_{22} \text{ veya}$$

$$x_{12} + x_{22} - g_2 = 0 \text{ (2. tip benzinin varil cinsinden toplam miktarı)}$$

1. ve 2. bileşenlere ise sırasıyla h_1 ve h_2 dersek;

$$x_{11} + x_{12} - h_1 = 0 \text{ (1. tip bileşenin varil cinsinden toplam miktarı)}$$

$$x_{21} + x_{22} - h_2 = 0 \text{ (2. tip bileşenin varil cinsinden toplam miktarı)}$$

Bu yeni ilişkilerden yararlanarak önceki modeli daha basit bir şekilde ifade edebiliriz.

Amaç Fonksiyonu:

$$\text{Maksimum kar } Z = 48g_1 + 53g_2 - 33h_1 - 37h_2$$

Kısıtlar:

$$x_{11} + x_{21} - g_1 = 0 \qquad g_1 \geq 60.000$$

$$x_{12} + x_{22} - g_2 = 0 \qquad g_2 \geq 15.000$$

$$x_{11} + x_{12} - h_1 = 0 \qquad g_1 \leq 80.000$$

$$x_{21} + x_{22} - h_2 = 0 \qquad g_2 \leq 40.000$$

$$-x_{11} + 9x_{21} \geq 0 \qquad h_1 \leq 70.000$$

$$-7x_{12} + 3x_{22} \geq 0 \qquad h_2 \leq 60.000$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, g_1, g_2, h_1, h_2 \geq 0$$

Kaynaklar

Gams – A User's Guide, Tutorial by Richard E. Rosenthal, Gams Corporation, USA, 2007.

Yöneylem Araştırması Gams Uygulama Ders Notları, Berna Tekraş Sivrikaya, İstanbul Teknik Üniversitesi, İşletme Fakültesi, 2010.

Yöneylem Araştırması – 2 Ders Notları, Özgür Kabak, İstanbul Teknik Üniversitesi, İşletme Fakültesi.

Yöneylem Araştırması – 1 Paket Programlar, Sultan Ceren Salkın, İstanbul Teknik Üniversitesi, İşletme Fakültesi.

Kucukkoc, I., Doğrusal Programlamada Karışım Problemleri,
<http://w3.balikesir.edu.tr/~ikucukkoc/dokumanlar/mixture.pdf>, Erişim Tarihi: 15 Ocak 2018.

Sarker, R. A., Newton, C. S., Optimization Modelling: A Practical Approach, CRC Press Book, 2008.

Seçme N.Y., Klasik Doğrusal Programlama Ve Bulanık Doğrusal Programlamanın Karşılaştırmalı Bir Analizi: Üretim Planlama Örneği, Kayseri, 2005.

Ulucan A., Yöneylem Araştırması, İşletmecilik Uygulamalı Bilgisayar Destekli Modelleme, Ankara, 2007.

Hamblin, J.E., Math for Liberal Studies, Bin Packing and Scheduling, Shippensburg University,
<http://webpace.ship.edu/jehamb/mls/MLS%201-8.pptx> Erişim Tarihi 08.03.2018.