

Balıkesir Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi
Endüstri Mühendisliği Bölümü

Montaj Hattı Tasarımı ve Analizi - 8

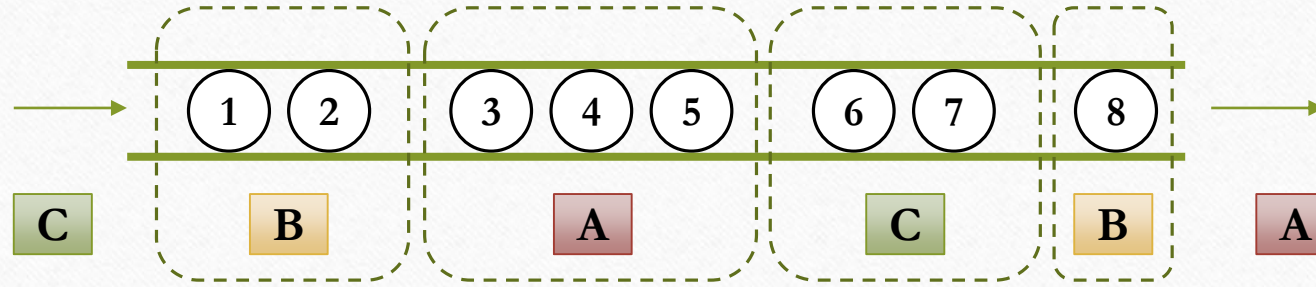
Dr. Öğr. Üyesi İbrahim KÜÇÜKKOÇ

<http://ikucukkoc.baun.edu.tr>

Karisik Modelli Montaj Hatti Dengeleme (KMD) Problemi

KMD

- Farkli ürünlerin veya aynı ürünün farklı modellerinin aynı hat üzerinde üretildiği veya montajının gerçekleştirildiği üretim tarzı **çok modelli (multi-model) veya karışık modelli (mixed-model) üretim** olarak adlandırılır.
- Çok modelli üretimde çeşitli modeller aynı hat üzerinde **partiler halinde** üretilir.
- Karışık modelli üretimde ise hattaki parti büyüklüğü bir adede kadar düşebilmektedir.



KMD

- Karişik modelli üretimin başarisi “**karişik modelli hat dengeleme**” ve “**model siralama**” olarak adlandırılan iki önemli problemin etkili çözümlerine bağlıdır.
- **Karişik modelli montaj hattı dengeleme** probleminin (**KMD**) tek modelli montaj hattı dengeleme probleminden farkı, hatta üretilen model çeşidinin birden fazla olması nedeniyle, görevlerin, **görev sürelerinin** ve **öncelik ilişkilerinin** modeller arasında farklılık göstermesidir.
- **Model siralama problemi** ise, montaj hattında üretilen çeşitli modellerin **hangi sirada** üretilceklerinin belirlenmesi ile ilgilidir.

KMD

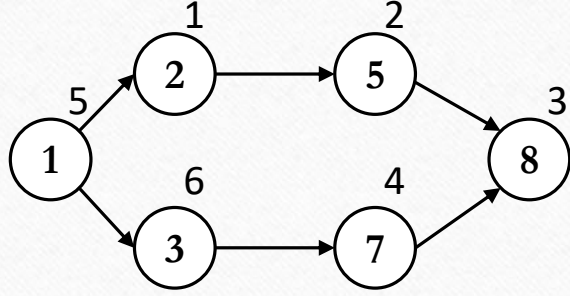
- Bugüne kadar yapılan çalışmalar incelendiğinde, karışık modelli montaj hattı dengeleme problemlerinin **iki temel yaklaşım** kullanılarak basit montaj hattı dengeleme problemine dönüştürüldüğü ve bu şekilde çözüldüğü görülmektedir:
 - Birleştirilmiş (combined) öncelik diyagramı yöntemi
 - Ayarlanmış görev süreleri yöntemleri

KMD

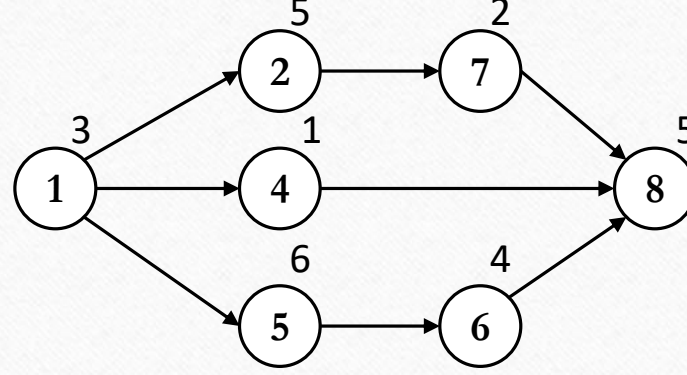
Birleştirilmiş Öncelik Diyagrami Yontemi:

- Birden fazla sayidaki modele ait öncelik diyagramlarını temsil eden ortak bir öncelik diyagramıdır. Bu yaklaşım, problemin çözümünü etkileyen değişken sayısını önemli derecede düşürmektedir.
- Fakat burada dikkat edilmesi gereken en önemli nokta, farklı modellerdeki öncelik ilişkileri arasında herhangi bir uyumsuzluğun olmaması gerektiğidir. Baska bir deyişle, eğer bir modelde 2 numaralı görevin 1 numaralı görevden sonra yapılması gerekiyorsa, diğer bütün modellerde de 2 numaralı görevin 1 numaralı görevden sonra yapılması gerekir.

KMD

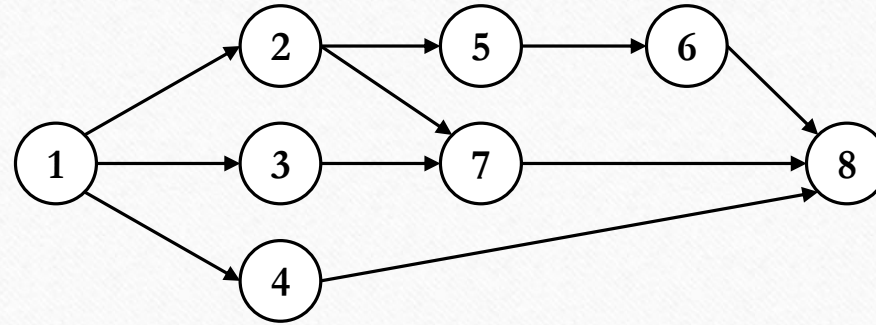


A Modeli



B Modeli

- Orneğin, yukarıda verilen A ve B gibi iki farklı modele ait öncelik diyagramları için geçerli olan birleştirilmiş öncelik diyagramı şu şekildedir:



**Birleştirilmiş
Öncelik Diyagramı**

KMD

Ayarlanmış Görev Süreleri:

- Farkli modellerde ortak olan görevlerin zamanlarının ağırlıklı ortalamalarının hesaplanması suretiyle problemin dönüştürüldüğü yöntemler ise **ayarlanmış görev süreleri** yöntemleri olarak adlandırılır.
- 24 saatlik (1440 dak.) bir üretim dönemi için bir önceki slaytta öncelik diyagramları verilen A ve B modellerinin taleplerinin sırasıyla 120 adet ve 60 adet olduğunu ve model sırasının “AAB” şeklinde olduğunu düşünelim.
- Bu durumda, belirlenen 1440 dakikalık üretim dönemi için çevrim zamanı;

$$C = 1440 \text{ dakika} / (120+60) \text{ adet} = \mathbf{8 \text{ dakika/adet}}$$
 olarak hesaplanır.

KMD

- Herhangi bir görev için ağırlıklı ortalama görev süresi, üretim döneminde o görev için harcanan toplam sürenin toplam üretim miktarına oranidir.
- Bir görevin (i) ağırlıklı ortalama görev süresi (wt_i) şu şekilde bulunur:

$$wt_i = \frac{\sum_{j \in M} t_{ij} D_j}{\sum_{j \in M} D_j}$$

D_j : j modelinin talebi ($j \in M$)

t_{ij} : j modeline ait i görevini gerçekleştirmek için gereken süre

KMD

- Bu örnek için ağırlıklı ortalama görev süreleri aşağıda görüldüğü gibi hesaplanır:

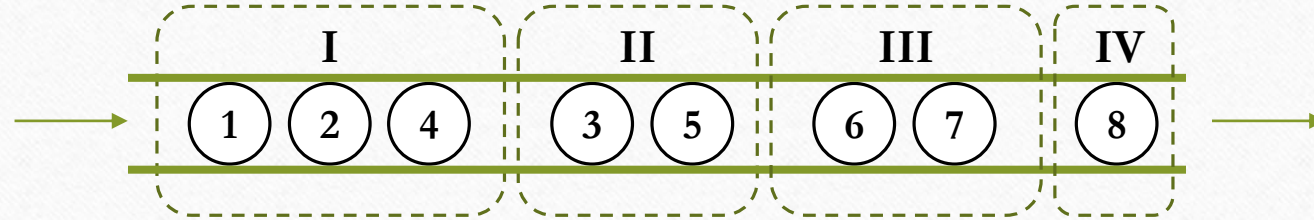
Görev (<i>i</i>)	Görev Süreleri		
	Model A (t_{iA})	Model B (t_{iB})	Ağırlıklı Ortalama (wt_i)
1	5	3	$(120 \times 5 + 60 \times 3) / 180 = 4.33$
2	1	5	$(120 \times 1 + 60 \times 5) / 180 = 2.33$
3	6	0	$(120 \times 6 + 60 \times 0) / 180 = 4.00$
4	0	1	$(120 \times 0 + 60 \times 1) / 180 = 0.33$
5	2	6	$(120 \times 2 + 60 \times 6) / 180 = 3.33$
6	0	4	$(120 \times 0 + 60 \times 4) / 180 = 1.33$
7	4	2	$(120 \times 4 + 60 \times 2) / 180 = 3.33$
8	3	5	$(120 \times 3 + 60 \times 5) / 180 = 3.66$

KMD

- Karişik modelli montaj hattı dengeleme problemleri, birleştirilmiş öncelik diyagramı ve ağırlıklı ortalama görev süreleri ile tek modelli montaj hattı dengeleme problemine dönüştürülmüş olur.
- Karişik modelli problem tek modelli montaj hattı dengeleme problemine dönüştürüldükten sonra herhangi bir yöntemle çözülebilir. Fakat dengelemede ağırlıklı ortalama görev sürelerinin kullanılması, dengeleme sonrasında **gerçek görev süreleri dikkate alındığında** bazı istasyonların iş yüklerinin **çevrim zamanını aşması** durumunun ortaya çıkmasına sebep olabilmektedir.
- Düz montaj hatlarında bu durumu ortadan kaldıracı için **düzgünleştirme algoritmaları** kullanılmaktadır.

KMD

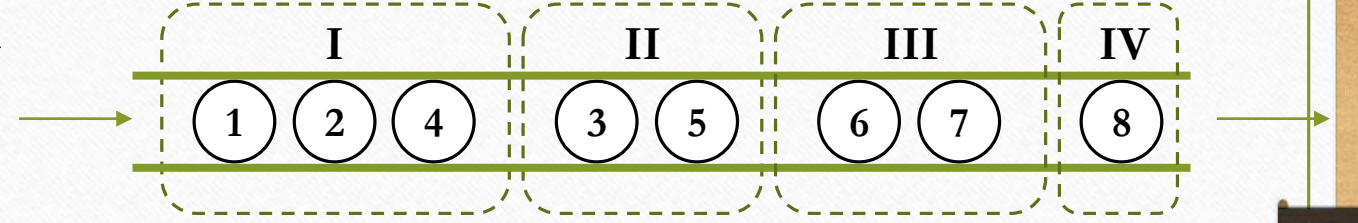
- Yukarıdaki örnek problem, birleştirilmiş öncelik diyagramı ve ağırlıklı ortalama görev süreleri ile, 8 dakikalık çevrim zamanı için düz montaj hattı olarak dengelendiğinde ortaya çıkan optimal hat dengesi 4 istasyondan oluşmaktadır ve şöyledir:



KMD

Bu montaj hattında herhangi bir çevrimde bir istasyonda sadece bir modelin üretimi söz konusudur.

Farklı modeller için bu dört istasyonun iş yükleri tabloda verilmiştir.



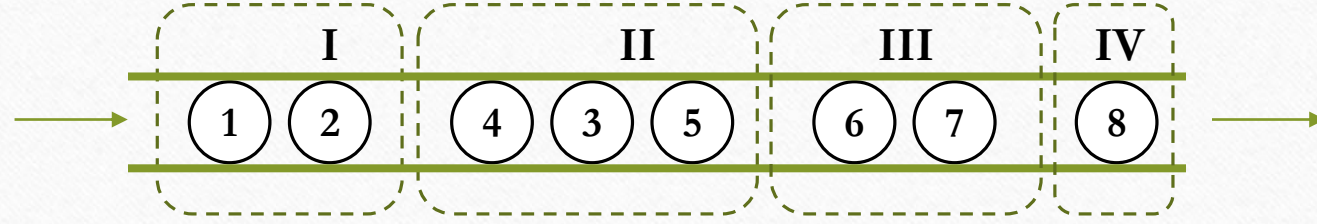
1. Çevrim: A için Is Yuku	6 (=5+1+0)	8 (=6+2)	4 (=0+4)	3
2. Çevrim: A için Is Yuku	6 (=5+1+0)	8 (=6+2)	4 (=0+4)	3
3. Çevrim: B için Is Yuku	9 (=3+5+1)	6 (=0+6)	6 (=4+2)	5

Tabloda görüldüğü gibi, birinci istasyonda B modelinin üretimi söz konusu olduğunda istasyon yükü **8 dakikalık çevrim zamanini aşmaktadır.**

KMD

- Ayarlanmış görev süreleri kullanılarak dengelenmiş montaj hatlarında, elde edilen optimal istasyon sayısı değiştirilmeden ardışık iş istasyonları arasında bazı görev değişiklikleri yapmak suretiyle **(düzenleştirme)** çevrim zamanını aşan iş yükleri en aza indirilmeye çalışılabilir.
- Bu örnekte 1. istasyonda yer alan 4 numaralı görev 2. istasyona kaydırılırsa hem öncelik ilişkileri ihlal edilmemiş hem de gerçek görev süreleri göz önüne alındığında tüm istasyonlar için çevrim zamanı kısıtı sağlanmış olacaktır.

KMD



						Toplam Zaman	Boş Zaman
1. Cevrim:	A için Is Yuku	6 (=5+1+0)	8 (=6+2)	4 (=0+4)	3	21	32-21=11
2. Cevrim:	A için Is Yuku	6 (=5+1+0)	8 (=6+2)	4 (=0+4)	3	21	32-21=11
3. Cevrim:	B için Is Yuku	8 (=3+5)	7 (=1+0+6)	6 (=4+2)	5	26	32-26=6

Tüm modeller ve istasyonlar için
cevrim zamanı kısıtı sağlandı.

$$WLE(\%) = \frac{\text{Kullanılan Etkin Zaman Toplamı}}{\text{Ayrılan Zaman}} \times 100 = \frac{68}{96} \times 100 = 71(\%)$$

VEYA

$$WLE(\%) = \frac{\text{Ağırlıklı Görev Süreleri Toplamı}}{K \times C} \times 100 = \frac{22,65}{32} \times 100 = 71(\%)$$

$$WBD(\%) = 100 - WLE(\%) = 29(\%)$$

KMD

- Ayarlanmış görev süreleri kullanılarak dengeleme yapılması durumunda, değişken ve kısıt sayısında önemli bir azalma olurken, dengeleme işleminden sonra bir takım düzgülendirme işlemlerine ihtiyaç duyulduğu belirtilmişti.
- Ancak bazı durumlarda, öncelik ilişkileri ve çevrim zamanı kısıtları nedeniyle düzgülendirme işlemi yapılamayacak çözümlerle karşılaşabilecektir.
- Bu durumda gerçek görev süreleri göz önüne alındığında çevrim zamanı kısıtı sağlanmamış olacaktır. Hem bu durumun üstesinden gelmek hem de düzgülendirme işlemine ihtiyaç duymamak için, KMD problemini, değişken ve kısıt sayısının artmasına göz yumarak bir takım matematiksel modeller yardımıyla çözmek mümkündür.
- Bu modellerden birini inceleyelim.

KMD

- KMD problemi için kullanılan bu modelde, öncelik ilişkilerini yine **birleştirilmiş öncelik diyagramı** üzerinden sağlarken, görev süreleri için **gerçek görev sürelerini** kullanacağız.
- Modelin varsayımları şöyledir:
 - Görevlerin her bir model için görev süreleri bellidir ve bilinmektedir. Ortak görevler farklı modellerde farklı görev sürelerine sahip olabilir.
 - Her bir model için görevlerin aralarındaki öncelik ilişkileri bilinmektedir.
 - İstasyonlar arası ara stoklara izin verilmemektedir.
 - Farklı modellerdeki ortak görevler aynı istasyona atanmak zorundadır.

KMD

Notasyon:

- i, r, s : görev
- k : istasyon
- j : model (urun)
- C : çevrim zamanı
- K_{max} : maksimum istasyon sayısı
- N : toplam görev sayısı
- J : Model sayısı
- t_{ij} : i görevinin j modeli için tamamlanma süresi
- S : öncelik ilişkileri kümesi
- $(r, s) \in S$: Bir öncelik ilişkisi; r görevi s görevinin komşu öncülüdür
- x_{ik} : 1, i görevi k istasyonuna atanmış ise; 0, aksi halde
- z_k : 1, k istasyonu açılmış ise; 0, aksi halde

KMD

**Amac
Fonksiyonu**

$$\text{Minimize } \sum_{k=1}^{K_{max}} z_k \quad (1)$$

KISITLAR

$$\sum_{k=1}^{K_{max}} x_{ik} = 1 \quad \forall i \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^N t_{ij} x_{ik} \leq C \cdot z_k \quad \forall k, \forall j \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^{K_{max}} k(x_{rk} - x_{sk}) \leq 0 \quad \forall (r, s) \in S \quad (4)$$

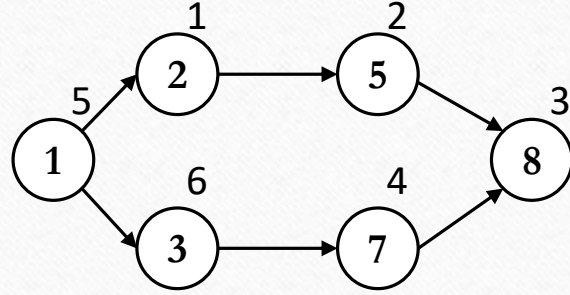
$$x_{ik}, z_k \in \{0,1\} \quad \forall i; \forall k \quad (5)$$

KMD

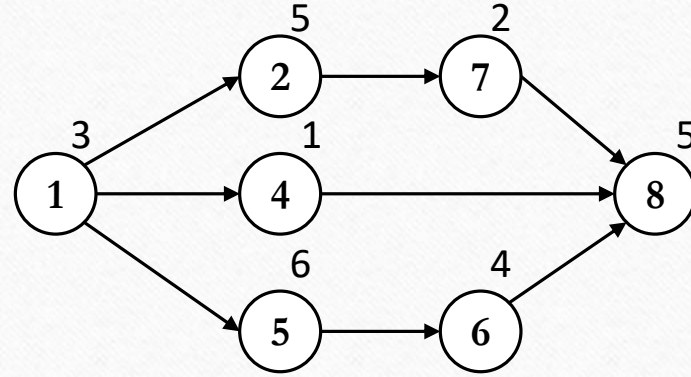
- Problemin amaç fonksiyonu **(1)**, hat boyunca açılan **istasyon sayisini minimize etmeye** yöneliktir.
- **2 numarali kisit**, bütün görevlerin istasyonlara atanmasını ve her görevin bir kere atanmasını sağlamaktadır.
- **3 numarali kisit**, açılan bir istasyondaki görevlerin görev süreleri toplamının her model için o modelin çevrim zamanını aşmaması içindir.
- **4 numarali kisit** birleştirilmiş öncelik diyagramına göre, öncülü olan bir görevin ya öncülüyle aynı istasyona ya da öncülünden sonraki bir istasyona atanmasını sağlamaktadır.
- **5 numarali kisit** ise modeldeki bütün x_{ik} ve z_k değişkenlerinin ikili düzende (binary) (0–1) olduğunu ifade etmektedir.

KMD

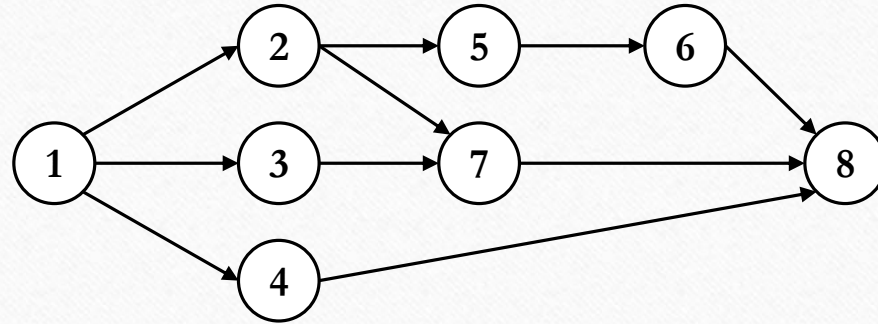
- **Ornek:** Daha once verilen 2 modelli ornek problem icin $C=15$ kabul ederek acik matematiksel modeli kuralim.



A Modeli



B Modeli



**Birlestirilmis
Oncelik Diyagrami**

KMD

- A modeli için $K_{min} = \max \left\{ \left[\frac{21}{15} \right]^+ 0, \right\} = 2$
- B modeli için $K_{min} = \max \left\{ \left[\frac{26}{15} \right]^+ 0, \right\} = 2$

Bu durumda $K_{max} = 3$ olsun

Amac Fonksiyonu:

$$\text{Minimize } z_1 + z_2 + z_3$$

KMD

Atama Kisitlari:

1. gorev icin (i=1): $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1$
2. gorev icin (i=2): $x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1$
3. gorev icin (i=3): $x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1$
4. gorev icin (i=4): $x_{41} + x_{42} + x_{43} = 1$
5. gorev icin (i=5): $x_{51} + x_{52} + x_{53} = 1$
6. gorev icin (i=6): $x_{61} + x_{62} + x_{63} = 1$
7. gorev icin (i=7): $x_{71} + x_{72} + x_{73} = 1$
8. gorev icin (i=8): $x_{81} + x_{82} + x_{83} = 1$

KMD

Cevrim Zamani Kisitlari:

A Modeli Icin

1. istasyon icin (k=1): $5x_{11} + 1x_{21} + 6x_{31} + 2x_{51} + 4x_{71} + 3x_{81} \leq 15z_1$

2. istasyon icin (k=2): $5x_{12} + 1x_{22} + 6x_{32} + 2x_{52} + 4x_{72} + 3x_{82} \leq 15z_2$

3. istasyon icin (k=3): $5x_{12} + 1x_{22} + 6x_{32} + 2x_{52} + 4x_{72} + 3x_{82} \leq 15z_3$

B Modeli Icin

1. istasyon icin (k=1): $3x_{11} + 5x_{21} + 1x_{41} + 6x_{51} + 4x_{61} + 2x_{71} + 5x_{81} \leq 15z_1$

2. istasyon icin (k=2): $3x_{12} + 5x_{22} + 1x_{42} + 6x_{52} + 4x_{62} + 2x_{72} + 5x_{82} \leq 15z_2$

3. istasyon icin (k=3): $3x_{13} + 5x_{23} + 1x_{43} + 6x_{53} + 4x_{63} + 2x_{73} + 5x_{83} \leq 15z_3$

KMD

Oncelik Iliskileri Kisitlari:

$$S = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,5), (2,7), (3,7), (4,8), (5,6), (6,8), (7,8)\}$$

$$(1,2) \text{ iliskisi icin: } 1(x_{11} - x_{21}) + 2(x_{12} - x_{22}) + 3(x_{13} - x_{23}) \leq 0$$

$$(1,3) \text{ iliskisi icin: } 1(x_{11} - x_{31}) + 2(x_{12} - x_{32}) + 3(x_{13} - x_{33}) \leq 0$$

$$(1,4) \text{ iliskisi icin: } 1(x_{11} - x_{41}) + 2(x_{12} - x_{42}) + 3(x_{13} - x_{43}) \leq 0$$

$$(2,5) \text{ iliskisi icin: } 1(x_{21} - x_{51}) + 2(x_{22} - x_{52}) + 3(x_{23} - x_{53}) \leq 0$$

$$(2,7) \text{ iliskisi icin: } 1(x_{21} - x_{71}) + 2(x_{22} - x_{72}) + 3(x_{23} - x_{73}) \leq 0$$

$$(3,7) \text{ iliskisi icin: } 1(x_{31} - x_{71}) + 2(x_{32} - x_{72}) + 3(x_{33} - x_{73}) \leq 0$$

$$(4,8) \text{ iliskisi icin: } 1(x_{41} - x_{81}) + 2(x_{42} - x_{82}) + 3(x_{43} - x_{83}) \leq 0$$

$$(5,6) \text{ iliskisi icin: } 1(x_{51} - x_{61}) + 2(x_{52} - x_{62}) + 3(x_{53} - x_{63}) \leq 0$$

$$(6,8) \text{ iliskisi icin: } 1(x_{61} - x_{81}) + 2(x_{62} - x_{82}) + 3(x_{63} - x_{83}) \leq 0$$

$$(7,8) \text{ iliskisi icin: } 1(x_{71} - x_{81}) + 2(x_{72} - x_{82}) + 3(x_{73} - x_{83}) \leq 0$$

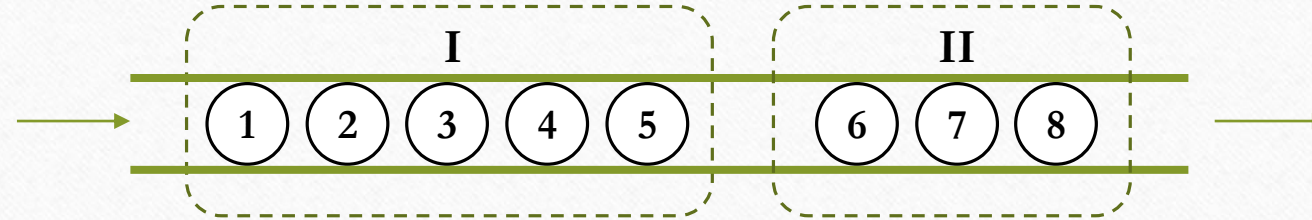
KMD

Isaret (Yön) Kisitlari:

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, \dots, x_{81}, x_{82}, x_{83} \in \{0,1\}$$

$$z_1, z_2, z_3 \in \{0,1\}$$

Modelin çözümlmesi sonucu elde edilecek optimal hat dengesi şöyle olacaktır:



1. Cevrim: A için Is Yuku	14 (=5+1+6+0+2)	7 (=0+4+3)
2. Cevrim: A için Is Yuku	14 (=5+1+6+0+2)	7 (=0+4+3)
3. Cevrim: B için Is Yuku	15 (=3+5+0+1+6)	11 (=4+2+5)

WLE(%) ve
WBD(%)
değerlerini
hesaplayınız.

Kaynaklar

- Kara, Y., 2015. Uretim Planlama-II Ders Notlari, Selcuk Universitesi, Konya, <http://goo.gl/Uccn8S>.
- Kara, Y., 2004. "U-tipi Montaj Hatti Dengeleme Problemleri için Yeni Modeller ve Otomotiv Yan Sanayiinde Bir Uygulama", Yayinlanmamış Doktora Tezi, Selçuk Üniversitesi, Konya.